УДК 517.97 Вестник СПбГУ. Прикладная математика... 2017. Т. 13. Вып. 1

М. С. Никольский[1], *Е. А. Беляевских*[2]

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ

[1] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Российская Федерация,
119991, Москва, ул. Губкина, 8
[2] Российский университет дружбы народов, Российская Федерация,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Изучаются некоторые задачи управления пучками траекторий управляемой системы. Такого рода задачи возникают, например, если начальное состояние управляемой системы известно неточно. Эта неточность существенно усложняет управление системой. Аналогичные задачи возникают также при моделировании динамики пучков заряженных частиц. В статье получены достаточные условия существования оптимального управления в некоторых задачах управления пучками траекторий. Библиогр. 6 назв.

Ключевые слова: управляемый объект, пучки траекторий, слабая сходимость функций.

M. S. Nikolskii[1], *E. A. Belyaevskikh*[2]

EXISTENCE THEOREMS FOR OPTIMAL CONTROL IN SOME PROBLEMS OF TRAJECTORIES BUNDLES CONTROL

[1] Steklov Mathematical Institute of RAS, 8, Gubkina ul.,
Moscow, 119991, Russian Federation
[2] Peoples' Friendship University of Russia, 6, Miklukho-Maklaia ul.,
Moscow, 117198, Russian Federation

In the paper, some control problems by bundles of trajectories for controlled system are considered. For example, such problems arise if initial point of system is not exactly known. Such inaccuracy essentially complicates control of system. Analogous problems arise in modeling of dynamics for bundles of charged particles. In the paper, some sufficient conditions for existence of optimal control in some problems of control by bundles of trajectories were obtained. Refs 6.

Keywords: controlled object, trajectories bundles, weak convergence of functions.

В настоящей работе рассматриваются некоторые задачи управления пучками траекторий управляемых систем. Обычно в задачах управления фиксируется начальное состояние системы. В задачах же управления пучками траекторий (см., например, [1]) начальное состояние системы считается принадлежащим заданному компакту положительной лебеговой меры. Таким образом, за счет неединственности начального состояния соответствующему допустимому управлению отвечает пучок траекторий. Отметим, что неоднозначность начального состояния может физически означать неполноту информации о начальном состоянии системы. Такого рода ситуация характерна также для моделей, описывающих динамику пучков заряженных частиц (см. [1]). Качество управления пучком траекторий можно оценивать различными функционалами. Описываются функционалы интегрального типа и типа Больца [1]. При весьма общих предположениях об управляемой системе и подынтегральных функциях будут доказаны теоремы существования оптимального управления в классе из-

Никольский Михаил Сергеевич — профессор; mni@mi.ras.ru
Беляевских Елена Анатольевна — аспирант; bel.elena.anat@gmail.com

Nikolskii Mikhail Sergeevich — professor; mni@mi.ras.ru
Belyaevskikh Elena Anatolyevna — post-graduate student; bel.elena.anat@gmail.com

DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.111

меримых по Лебегу управлений, на которые накладываются мгновенные геометрические ограничения типа выпуклый компакт. При этом используются функциональный анализ и аппарат математической теории управляемых систем.

Задача 1. Рассмотрим управляемый объект, динамика которого в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ описывается дифференциальным уравнением вида (см., например, [2–4] и др.)

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

где t — время; константа $T > 0$; $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор; $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий вектор; $f(x) \in \mathbb{R}^n$; $B(x)$ — матрица размерности $n \times r$, $n \geqslant 1, r \geqslant 1$.

Здесь и далее под $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 1)$ понимается действительное евклидово арифметическое пространство, образуемое k-мерными вектор-столбцами со стандартным скалярным произведением векторов, которое будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$, и длиной вектора $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Под множеством допустимых управлений $\mathcal{U}$ будем понимать множество измеримых по Лебегу на [0,T] функций $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$, где U — выпуклый компакт. Элементы множества $\mathcal{U}$ будем обозначать $u(\cdot)$.

Через $x(t, x_0, u(\cdot)), t \in [0, T]$, будем обозначать абсолютно непрерывное решение задачи Коши (1), соответствующее управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Пусть M_0 — некоторый компакт из $\mathbb{R}^n$, имеющий положительную меру Лебега.

Пучком траекторий (или просто **пучком**), соответствующим управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, будем называть семейство решений $x(t) = x(t, x_0, u(\cdot))$ уравнения (1), где $t \in [0, T],\ x_0 \in M_0$.

Предположим, что функции $f(x)$ и $B(x)$ непрерывно дифференцируемы и липшицевы на $\mathbb{R}^n$, т. е. существуют такие константы $L_1, L_2 > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L_1 |x_1 - x_2|, \tag{2}$$

$$\|B(x_1) - B(x_2)\| \leqslant L_2 |x_1 - x_2|, \tag{3}$$

где $\| \cdot \|$ означает операторную норму матрицы.

С помощью неравенств (2), (3) нетрудно обосновать при $x \in \mathbb{R}^n,\ u \in U$ неравенство вида

$$|F(x, u)| \leqslant c_1 (1 + |x|), \tag{4}$$

здесь

$$F(x, u) = f(x) + B(x)u, \tag{5}$$

$c_1 > 0$ — достаточно большая эффективно вычислимая константа. С помощью (4), (5) и теории дифференциальных неравенств (см., например, [5]) можно обосновать неравенство

$$|x(t, x_0, u(\cdot))| \leqslant \exp(c_1 t) \cdot (c_1 T + |x_0|), \tag{6}$$

в котором $t \in [0, T], \exp(\alpha)$ обозначает экспоненту с показателем $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Из этой априорной оценки вытекает продолжимость абсолютно непрерывного решения $x(t, x_0, u(\cdot))$ на весь отрезок $[0, T]$ при произвольных $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Отметим также единственность решения $x(t, x_0, u(\cdot))$ при данных $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ u(\cdot) \in \mathcal{U}$ (см. [3, с. 66, 67, теорема IA]).

Сечение пучка решений при $t \in [0, T],\ u(\cdot) \in \mathcal{U}$ определим формулой

$$M_{t, u(\cdot)} = \{x(t, x_0, u(\cdot)) : x_0 \in M_0\}. \tag{7}$$

Пусть $\phi(t,x)$ — некоторая скалярная функция, определенная и непрерывная, на $[0,T]\times\mathbb{R}^n$. На множестве управлений $u(\cdot)\in\mathcal{U}$ рассмотрим функционал вида (см. [1])

$$J(u(\cdot))=\int\limits_0^T\int\limits_{M_{t,u(\cdot)}}\phi(t,x)dxdt, \tag{8}$$

сначала выполнив интегрирование в смысле Лебега по dx, а потом интегрирование по Лебегу по dt.

Отметим, что множество $M_{t,u(\cdot)}$ (см. (7)) является компактом при произвольных $t\in[0,T]$ и $u(\cdot)\in\mathcal{U}$. Этот факт можно обосновать с помощью теоремы IA из [3] (см. с. 66, 67). Учитывая непрерывность функции $\phi(t,x)$, можно теперь утверждать, что интеграл Лебега

$$G(t,u(\cdot))=\int\limits_{M_{t,u(\cdot)}}\phi(t,x)dx \tag{9}$$

существует при произвольных $t\in[0,T],\ u(\cdot)\in\mathcal{U}$.

Произведем в (9) замену переменных вида

$$x=x(t,x_0,u(\cdot)), \tag{10}$$

где $t\in[0,T],\ x_0\in M_0$. Тогда, согласно теории интеграла Лебега ([6] и др.), приходим к формуле (см. (9))

$$G(t,u(\cdot))=\int\limits_{M_0}\phi(t,x(t,x_0,u(\cdot)))\left|\det\frac{\partial x(t,x_0,u(\cdot))}{\partial x_0}\right|dx_0, \tag{11}$$

здесь det означает детерминант матрицы.

Для оправдания формулы (11) желательно иметь непрерывность функций $x(t,x_0,u(\cdot)),\quad \frac{\partial x(t,x_0,u(\cdot))}{\partial x_0}$ по (t,x_0) на $[0,T]\times M_0$ при фиксированном $u(\cdot)\in\mathcal{U}$.

При непрерывной дифференцируемости $f(x)$, $B(x)$ нужная непрерывность $x(t,x_0,u(\cdot))$ имеет место (см. [3, с. 66, 67, теорема IA]). Для обоснования нужной непрерывности $\frac{\partial x(t,x_0,u(\cdot))}{\partial x_0}$ можно использовать непрерывность $x(t,x_0,u(\cdot))$ по (t,x_0), систему уравнений в вариациях (см. [3])

$$\dot y=\frac{\partial F(x(t,x_0,u(\cdot)),u(t))}{\partial x}y,\ \ i=1,\dots,n,$$

в которых функция $F(x,u)$ определяется формулой (5), а также применять интегральное неравенство Гроноулла (см. [4]). Отметим, что при $t=0$ матрица $\frac{\partial x(t,x_0,u(\cdot))}{\partial x_0}$ совпадает с единичной матрицей E порядка n.

Итак, в силу сказанного, функция $G(t,u(\cdot))$ (см. (9), (11)) является непрерывной функцией на $[0,T]$ при фиксированном $u(\cdot)\in\mathcal{U}$, поэтому повторный интеграл

$$I(u(\cdot))=\int\limits_0^T\int\limits_{M_0}\phi(t,x(t,x_0,u(\cdot)))\left|\det\frac{\partial x(t,x_0,u(\cdot))}{\partial x_0}\right|dx_0dt \tag{12}$$

определен корректно.

На основании теоремы Фубини (см., например, [6]) интеграл $I(u(\cdot))$ можно рассматривать как интеграл Лебега от непрерывной функции переменных (t, x_0) по множеству $[0,T]\times M_0$. Таким образом, $I(u(\cdot))$ (см. (12)) можно записать в виде интеграла Лебега по множеству $\mathfrak{M} = [0,T] \times M_0$ следующим образом:

$$I(u(\cdot)) = \int\limits_{\mathfrak{M}} L(t, x_0, u(\cdot))dy, \tag{13}$$

где $y = (t, x_0) \in \mathfrak{M}$,

$$L(t, x_0, u(\cdot)) = \phi(t, x(t, x_0, u(\cdot))) \left|\det \frac{\partial x(t, x_0, u(\cdot))}{\partial x_0}\right|. \tag{14}$$

Для дальнейшего будет полезна формула Лиувилля (см. [1])

$$\det\left(\frac{\partial x(t, x_0, u(\cdot))}{\partial x_0}\right) = \exp\left(\int\limits_0^t \mathrm{sp}\frac{\partial F(x(s, x_0, u(\cdot)), u)}{\partial x}ds\right), \tag{15}$$

в которой sp означает след матрицы.

Отметим также, что $B(x)u = \sum\limits_1^r b^j(x)u_j$, $\frac{\partial B(x)}{\partial x} = \sum\limits_1^r \frac{\partial b^j(x)}{\partial x}u_j$, здесь $b^j(x)$ — столбцы матрицы $B(x)$.

Таким образом,

$$\frac{\partial F(x,u)}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \sum_1^r \frac{\partial b^j(x)}{\partial x}u_j.$$

Следовательно, при $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место формула

$$\mathrm{sp}\frac{\partial F(x,u)}{\partial x} = \alpha(x) + \langle \beta(x), u\rangle\,, \tag{16}$$

где $\alpha(x)$ — непрерывная скалярная функция; $\beta(x)$ — непрерывная r-мерная векторная функция.

Рассмотрим задачу минимизации функционала $I(u(\cdot))$ (см. (12), (13)) по $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Нашей целью является обоснование существования оптимального управления в этой задаче.

Используя гладкость функций $f(x), B(x)$ и непрерывность функции $\phi(t,x)$, а также ограниченность множеств M_0, U, неравенство (6) и формулы (12)–(15), нетрудно показать, что функционал $I(u(\cdot))$ равномерно ограничен по модулю на $\mathcal{U}$. Отсюда вытекает, что величина

$$\gamma = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} I(u(\cdot))$$

является конечной.

Рассмотрим некоторую минимизирующую последовательность $u_k(\cdot) \in \mathcal{U}$, $k = 1, 2, \ldots,$ для описываемой задачи минимизации. Тогда последовательность $I(u_k(\cdot))$ при $k \to \infty$ стремится к инфимуму γ. Минимизирующие последовательности существуют на основе определения инфимума. Известно (см., например, [4]), что из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность в смысле гильбертова пространства $\mathcal{L}_r^2(0,T)$ к некоторой функции $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}$. Производя, если надо, соответствующую перенумерацию, можно считать, что $u_k(\cdot)$ при $k \to \infty$ сходится слабо в

$\mathcal{L}_r^2(0,T)$ к $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}$. Отметим далее (см. теорему 2.1 в [4]), что при фиксированном $x_0 \in M_0$ для решений $x(t,x_0,u_k(\cdot))$ при $k \to \infty$ имеет место сходимость в равномерной метрике $C_n(0,T)$ к решению $x(t,x_0,u_*(\cdot))$.

Из сказанного выше, формул (12)–(16) и свойств слабой сходимости в пространстве $\mathcal{L}_r^2(0,T)$ вытекает, что при фиксированных $t \in [0,T]$, $x_0 \in M_0$ и $k \to \infty$ последовательность чисел $L(t,x_0,u_k(\cdot))$ стремится к числу $L(t,x_0,u_*(\cdot))$. Отметим, что (см. (4), (6), (14), (15)) для достаточно большой константы $C > 0$ равномерно по $t \in [0,T]$, $x_0 \in M_0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ имеет место оценка

$$|L(t,x_0,u_k(\cdot))| \leqslant C.$$

Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. теорему на с. 348 в [6]), получаем, что инфимум интегрального функционала (13) достигается на $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}$. Итак, из вышесказанного вытекает

Теорема 1. *При сделанных предположениях в экстремальной задаче 1 существует оптимальное управление.*

Задача 2. Кратко рассмотрим более общую задачу управления пучками траекторий для управляемого объекта (1).

Все предположения относительного управляемого объекта (1) и начального множества M_0, которые мы сделали для задачи 1, сохраняются. Отличие состоит в том, что вместо минимизируемого функционала $I(u(\cdot))$ (см. (8)) теперь рассматривается интегральный функционал более общего вида

$$I_1(u(\cdot)) = I(u(\cdot)) + I_2(u(\cdot)), \tag{17}$$

где интегральный функционал $I_2(u(\cdot))$

$$I_2(u(\cdot)) = \int\limits_{M_{T,u(\cdot)}} g(x)dx, \tag{18}$$

здесь $g(x)$ — непрерывная скалярная функция на $\mathbb{R}^n$, интеграл понимается в смысле Лебега. Функция $\phi(t,x)$ в формуле (8) по-прежнему предполагается непрерывной на $[0,T] \times \mathbb{R}^n$. Для доказательства существования минимума функционала $I_1(u(\cdot))$ по $u(\cdot)$ можно провести в (18) замену переменных (ср. с (10))

$$x = x(T,x_0,u(\cdot))$$

при фиксированном $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Тогда

$$I_2(u(\cdot)) = \int\limits_{M_0} g\left(x\left(T,x_0,u(\cdot)\right)\right) \left|\det \frac{\partial x(T,x_0,u(\cdot))}{\partial x_0}\right| dx_0. \tag{19}$$

Обоснование существования интеграла Лебега (19) производится по схеме, представленной для задачи 1, с очевидными изменениями. Используя гладкость функций $f(x), B(x)$ и непрерывность функций $\phi(t,x)$, $g(x)$, а также ограниченность множества M_0, неравенство (6) и формулы (12)–(15), (17), (18), нетрудно показать, что функционал $I_1(u(\cdot))$ равномерно ограничен по модулю на $\mathcal{U}$. Отсюда вытекает, что величина

$$\gamma_1 = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} I_1(u(\cdot))$$

является конечной.

Рассмотрим некоторую минимизирующую последовательность $u_k(\cdot) \in \mathcal{U}$, $k = 1, 2, \ldots$, для рассматриваемой задачи минимизации. Тогда последовательность $I_1(u_k(\cdot))$ при $k \to \infty$ стремится к инфимуму γ_1. Дальнейшие рассуждения для доказательства существования минимума в задаче 2 производятся по схеме для задачи 1 с очевидными изменениями. Из сказанного вытекает

Теорема 2. *При сделанных предположениях в экстремальной задаче 2 существует оптимальное управление.*

Литература

1. *Овсянников Д. А.* Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с.

2. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 393 с.

3. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления / пер. с англ. Л. Л. Леонтьевой; под ред. Я. Н. Ройтенберга. М.: Наука, 1972. 574 с. (*Lee E. B., Markus L.* Foundations of optimal control theory.)

4. *Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 237 с.

5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / пер. с англ. И. Х. Сабитова, Ю. В. Егорова; под ред. В. М. Алексеева. М.: Мир, 1970. 719 с. (*Hartman F.* Ordinary differential equations.)

6. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. 6-е изд., стереотип. М.: Физматлит, 2001. Т. II. 592 с.

Для цитирования: Никольский М. С., Беляевских Е. А. Теоремы существования оптимального управления для некоторых задач управления пучками траекторий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 1. С. 113–118. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.111

References

1. Ovsyannikov D. A. *Matematicheskie metody upravleniya puchkami* [*Mathematical methods of bundles control*]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1980, 228 p. (In Russian)

2. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mischenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nih processov* [*Mathematical theory of optimal processes*]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 393 p. (In Russian)

3. Lee E. B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* Malabar, FL, Krieger Pub. Co., 1986, 586 p. (Russ. ed.: Lee E. B., Markus L. *Osnovy teorii optimal'nogo uprevleniya.* Moscow, Nauka Publ., 1972, 574 p.)

4. Osipov Yu. S., Vasilyev F. P., Potapov M. M. *Osnovy metoda dinamiceskoy regulyaqrizacii* [*The basics of the method of dynamic regularization*]. Moscow, Moscow State University Publ., 1999, 237 p. (In Russian)

5. Hartman F. *Ordinary differential equations.* London, John Wiley & Sons, 1964, 612 p. (Russ. ed.: Hartman F. *Obyknovennie differencial'nie uravneniya.* Moscow, Mir Publ., 1970, 719 p.)

6. Nikolskii S. M. *Kurs matematicheskogo analiza* [*A course of mathematical analysis*]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, vol. II, 592 p. (In Russian)

For citation: Nikolskii M. S., Belyaevskikh E. A. Existence theorems for optimal control in some problems of trajectories bundles control. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2017, volume 13, issue 1, pp. 113–118. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.111

Статья рекомендована к печати проф. Д. А. Овсянниковым.

Статья поступила в редакцию 12 декабря 2016 г.

Статья принята к печати 19 января 2017 г.